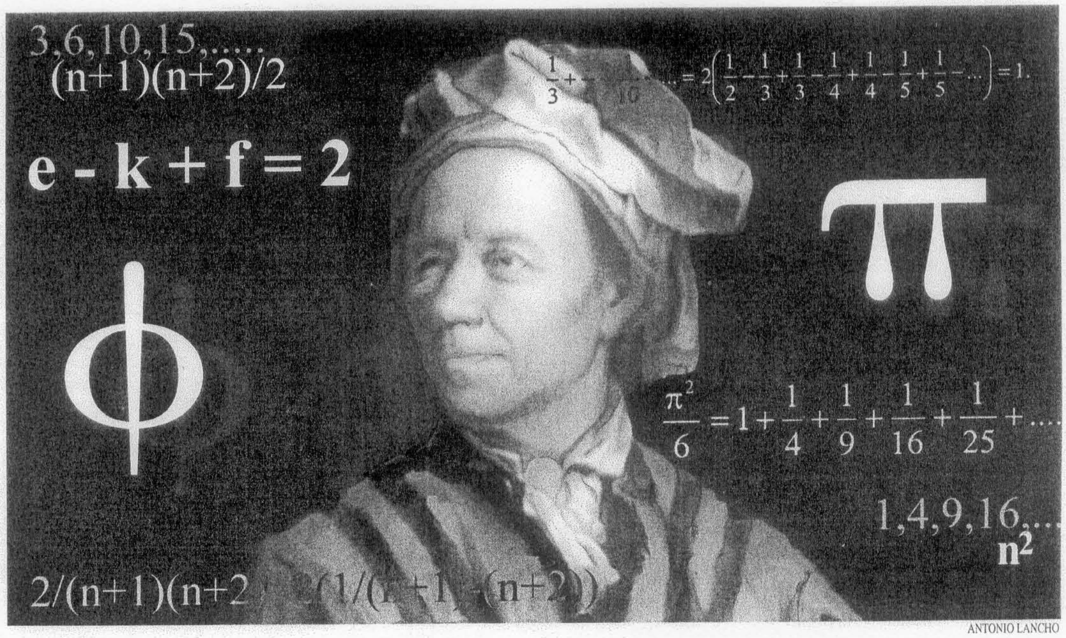
# Las Matemáticas en el Siglo de las Luces

Por Antonio Córdoba

***Antonio Córdoba** (Murcia, 1949) es matemático. Ha publicado artículos de investigación en Análisis Armónico, Teoría de los Números, Ecuaciones Diferenciales y Física Matemática. Doctor por la Universidad de Chicago y catedrático de la Universidad Autónoma de Madrid, ha sido profesor de la Universidad de Princeton y miembro del Institute for Advanced Study. Fundó la Revista* Matemática Iberoamericana.




ANTONIO LANCHO

Leonhard Euler y Joseph L. Lagrange son los dos grandes matemáticos de la Ilustración. En sus obras, el cálculo infinitesimal de Newton y Leibniz se convirtió en una poderosa máquina analítica, capaz de llevar a cabo tareas tan ambiciosas como fue la modelización de las diversas ramas de la Mecánica. En ambos se da también un delicado equilibrio entre las varias caras de las matemáticas: como parte de la ciencia, como herramienta para otras ciencias y como un estudio con su propia dinámica, fines y criterios. Si de Lagrange hay que destacar su *Mécanique Analytique* (1786), dentro de la obra proteica de Euler ocupa un lugar preeminente *Introductio in analysim infinitorum*. Se trata del libro que hoy nos ocupa comentar, por cuanto la Real Sociedad Matemática Española y la Sociedad Andaluza de Enseñantes de Matemáticas han patrocinado una espléndida edición de su primer volumen, que consta de dos tomos: el primero es una versión facsímil del ejemplar de la primera edición, escrito en latín y fechado en 1748, que se conserva en el Real Instituto y Observatorio de la Armada en San Fernando, Cádiz; el segundo tomo es una muy cuidada traducción al castellano de José Luis Arantegui; junto a tres ensayos sobre la ciencia del período ilustrado, la vida de Euler y la propia *Introductio*, escritos, respectivamente, por los profesores Javier Ordóñez, Mariano Martínez y Antonio Durán. De este último autor es también la colección de notas a pie de página, que sirven para precisar el origen y el desarrollo ulterior de los conceptos y los resultados contenidos en el libro.

Según la Historia, primero fueron la Aritmética y la Geometría, que florecieron entre los griegos clásicos. Luego vino el Álgebra de los árabes y los matemáticos del renacimiento. Pero hay que esperar al barroco para que se desarrolle el Cálculo, para que el hombre aprenda a sumar infinitos sumandos y a multiplicar infinitos factores. Ese gran salto dado por Newton y Leibniz, los hermanos Bernoulli y tantos otros, nos hizo pasar de la infancia a la juventud matemáticas. *Introductio in analysim infinitorum* es un libro donde se muestra ese vigor juvenil, atrevido, chispeante y divertido. En él se detecta enseguida la sagacidad y la intuición insuperada de Euler en la manipulación de las series, las funciones y las identidades numéricas. Pero también rezuma el gusto de su autor en el por contarnos sus descubrimientos y mostrarnos los poderes del nuevo método.

Mediado el Siglo de las Luces, aún no existía una exposición sistemática del Cálculo. La trilogía euleriana (*Introductio in analysim infinitorum*, dos volúmenes, 1748; *Institutiones calculi differentialis*, dos volúmenes, 1755; e *Institutiones calculi integralis*, tres volúmenes, 1768-70), constituye un tratado completo. Tanto de lo obtenido por autores anteriores, como de las aportaciones originales del propio Euler.

*Introductio* está escrito en un estilo pedagógico, pero ágil y de una claridad exquisita. Comienza con una definición de función basada en expresiones analíticas que abarca los polinomios, las funciones trigonométricas, las series de potencias, las exponenciales, los logaritmos y sus inversas, junto con otros ejemplos de funciones trascendentes. Años más tarde, especialmente a partir de su polémica con D'Alembert sobre la ecuación de la cuerda vibrante, Euler se dio cuenta de que no era una definición satisfactoria, por lo que al final de su vida desarrolló otra noción más general de función o correspondencia. Empero, haber puesto el énfasis en la idea de función, en vez de en la de curva o en la de magnitud dinámica, fue un hito en el desarrollo conceptual del Análisis. *Introductio* es importante también por sus aportaciones al lenguaje y al desarrollo de la notación matemática. El uso de π para designar la razón de la circunferencia al diámetro, de la letra *e* para la base de los logaritmos neperianos, de *i* para el número imaginario $\sqrt{-1}$, de la letra Σ para designar una suma (finita o infinita), y de la expresión *f(x)* para una función de la variable independiente *x*, son notaciones felices que se consolidarán tras su aparición en esta obra. Se trata de un magnífico primer libro de texto de análisis matemático y un monumento de la Ciencia Ilustrada: exhibe la maestría de su autor en el manejo de las series y de los productos infinitos; contiene la solución de un problema de Leibniz y Jakob Bernoulli que fue un objeto del deseo durante muchos años; establece tanto la teoría de las fracciones continuas como la de las particiones; perfecciona el lenguaje y crea una notación que impulsará el desarrollo de las matemáticas y que perdurará hasta nuestros días. En versos de Jorge Guillén:

Es el redondeamiento
del esplendor: Mediodía.
Todo es cúpula. Reposa
central, sin querer, la rosa,
A un sol en cenit sujeta.
Y tanto se da el presente,
que el pie caminante siente
la integridad del planeta.

## La fascinación de los números

Con respecto a lo que ocurre en otras disciplinas, los matemáticos estamos en cierta desventaja. Los médicos, los abogados, los arquitectos, e incluso la mayoría de los físicos, pueden describir su trabajo a los profanos. Quizá no podrán explicar completamente los problemas más profundos, pero sí encontrar las metáforas adecuadas para, al menos, hacer notar lo que hay en la superficie de los proyectos que los mantienen ocupados y subrayar algunas de sus consecuencias. Nada de esto ocurre en nuestra ciencia. Habrá que tener vocación de aguafiestas, o quizá no estar demasiado sobrio, para intentar atraer la conversación hacia las matemáticas en una reunión social. Una dificultad radica en el lenguaje, claro y preciso, sin duda, que puede constituir una barrera para los no iniciados. Pero que resulta ser necesario, por lo menos en dosis pequeñas, para poder apreciar realmente las astucias de la razón y la belleza de la concatenación de las ideas que suele haber detrás de un resultado matemático genuino. Pongamos por caso que hablamos de la razón áurea: del número de oro; del rectángulo más esbelto según los clásicos griegos; de las proporciones de la fachada del Partenón; de las espirales de las conchas de ciertos moluscos; o del cociente entre la altura total de la Venus de Botticelli y la de su celebrado «omphalós». Podríamos hablar y divagar durante mucho tiempo. No obstante, al cabo de un rato, resulta imprescindible saber quién es ese tan afamado número de oro. Pues bien, se trata de la raíz cuadrada de cinco, más uno, partido todo por dos:

$$\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Suele decirse que la introducción de una fórmula matemática en un texto reduce a la mitad el número de sus posibles lectores. Seguramente hay algo de cierto en ello, pero observemos que la fórmula para φ, además de ser precisa y corta, nos permite deducir una gran cantidad de propiedades que serían mucho más difíciles de obtener sin ella. Por ejemplo: $\phi^2 = \phi+1$, que podemos también escribir como $\phi = 1+1/\phi$, e iterar en la forma $\phi = 1+1/(1+1/\phi)$... Lo que constituye un ejemplo notable del algoritmo de las fracciones continuas, tratado y sistematizado por Euler en el capítulo XVIII del libro que comentamos.

Aún a riesgo de sufrir las consecuencias del pronóstico que antes hemos mencionado, me parece que cualquier glosa de *Introductio* tiene que versar sobre sus matemáticas, y no sólo de cuestiones en torno a ellas. Centremos por un momento nuestra atención en los Pitagóricos de los siglos V y VI antes de nuestra era, quienes tuvieron la idea revolucionaria de que los números están detrás de las explicaciones más profundas de los fenómenos del universo, y se dedicaron a investigar sus propiedades.

Representándolos por medio de piedras (cálculos) sobre la arena encontraron muchas sucesiones notables. Tales como:

a) La sucesión de los números triangulares: 3, 6, 10, 15,..., cuyo término general es *(n+1) (n+2)/2*.

b) La sucesión de los números cuadrados: 1, 4, 9, 16, ..., cuyo término general es $n^2$.

Y muchas otras. Pero avancemos en el tiempo hasta 1672 y fijémonos en Leibniz, que era entonces un joven abogado en visita diplomática a París, con la misión de disuadir a Luis XIV para que cejase en sus proyectos de invadir territorios alemanes. Allí conoció a Huygens, recién nombrado director del observatorio astronómico, quien le propuso el problema de evaluar la suma de los recíprocos de los números triangulares. Leibniz lo resolvió con la sencilla observación de que 2/(n+1)(n+2) = 2(1/(n+1)- 1/(n+2)), por lo que

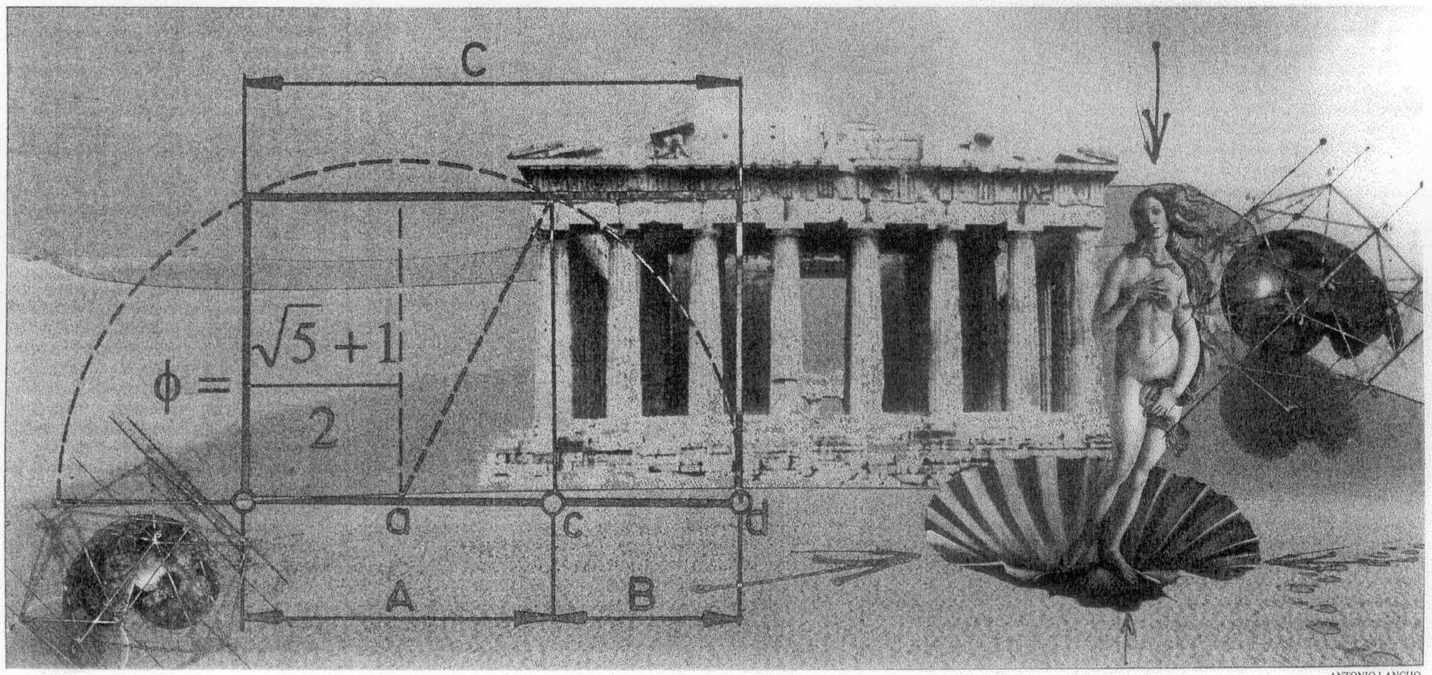
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\ldots=2\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\ldots\right]=1$$

Conseguir esta solución tan simple, pero tan ingeniosa, afectó tanto a Leibniz que le indujo a dedicar una buena parte de su tiempo a las matemáticas. Lo que le llevó a codescubrir el cálculo infinitesimal y a ejercer una profunda influencia en su desarrollo posterior través de una serie de notables matemáticos, entre los que cabe citar a los hermanos Jakob y Johann Bernoulli. Precisamente Jakob, el mayor de los Bernoulli, se obsesionó con la suma de los recíprocos de los cuadrados. Pero fue Euler, antiguo discípulo de su hermano Johann, quien obtuvo su valor:

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\ldots$$

Identidad que encontramos en el capítulo X y que es una de las cimas de *Introductio*. Resulta que la suma de los recíprocos de los cuadrados involucra al número π la razón de la longitud de cualquier circunferencia a su diámetro, esa constante que los griegos clásicos supieron detectar, pero que no fue bien aproximada hasta varios siglos después, cuando el gran Arquímedes obtuvo sus primeras cifras decimales: π 3.1415... y del que Euler, en *In-*

*Viene de la página anterior*




ANTONIO LANCHO

*troductio*, da más de cien. La irracionalidad de $\pi$ fue demostrada rigurosamente por Lambert, un contemporáneo de Euler, pero hubo que esperar al año 1882 para que Lindemann probara su trascendencia, es decir, que no es raíz de ninguna ecuación polinómica cuyos coeficientes sean todos enteros. Y de esta manera conocimos finalmente que no es posible construir, con regla y compás, un cuadrado de área igual al círculo de radio unidad. Es decir, la solución del famoso problema de la cuadratura del círculo formulado por aquellos maravillosos griegos de la época de Pericles. Que los cuadrados de los enteros se relacionen con el número $\pi$ a través de esa identidad de Euler es algo tan misterioso que bastantes generaciones de matemáticos posteriores a él han producido su propia interpretación y demostración. Sin ir más lejos, el autor de este ensayo obtuvo, hace aproximadamente un año, una prueba especialmente directa y sencilla. Pero la demostración que Euler dio en *Introductio* es una joya que muestra el talante de aquella época prodigiosa, y la maestría insuperada de su autor en el arte de obtener las cancelaciones ocultas que permiten sumar muchas series numéricas.

Euler relacionó la serie de los recíprocos de los cuadrados con la sucesión de los números primos, a través de su celebrado producto infinito para la función zeta. De la que supo calcular los valores que toma en los enteros pares, lo que también podemos leer en el capítulo X de *Introductio*. Empero, la naturaleza de los valores que toma en los impares sigue siendo «terra incognita». Luego vino Riemann, quien extendió la función al campo complejo y describió todo un proyecto de investigación que aún nos tiene ocupados: ¿dónde están los ceros de la función zeta? Se trata, quizá, de la pregunta, o problema abierto, más famoso de las matemáticas en estos comienzos del siglo XXI.

### *Urbi et Orbi*

Euler es un ejemplo de la maravillosa universalidad de las matemáticas. Aunque no fue un profesor universitario, ejerció una gran influencia en la organización del oficio. Y no sólo por su descomunal obra, que ocupa más de cien volúmenes y cuya recopilación no ha sido completada todavía. De carácter afable, fue considerado el maestro de todos los matemáticos. Un ejemplo es Lagrange, quien fue animado e inspirado por Euler (algunos años mayor) en sus investigaciones sobre el Cálculo de Variaciones, cuyas ecuaciones fundamentales denominamos hoy de Euler-Lagrange. Es una época en la que se están creando instituciones (Academias de Ciencias y revistas científicas especializadas) y procedimientos, como la elaboración de tesis doctorales. Por lo que no debe resultarnos extraño que el árbol genealógico académico de una parte importante de los matemáticos de nuestro tiempo tenga su origen en el tándem Euler-Lagrange.

Nacido en Basilea, Suiza, en el año 1707, Euler vivió la mayor parte de su vida entre San Petersburgo y Berlín (Rusia y Prusia), cuyas academias de ciencias rivalizaron para tenerlo como miembro distinguido. Su vida resalta en estos comienzos del siglo XXI cuando todavía se dan tantas vueltas a las peculiaridades nacionales, que tantos problemas artificiales plantean y tan escasas soluciones encuentran. Su obra tiene también un carácter universal. Su contemporáneo D'Alembert clasificó las matemáticas en «Puras» y «Mixtas», englobando con esta segunda denominación a casi todo el resto de las ciencias. Euler hizo contribuciones fundamentales a la mayoría de ellas. Un ejemplo notable fue la Mecánica de Fluidos, donde hay un antes y un después de que formulara sus ecuaciones, que son un hito en la modelización de la física de los medios continuos. ¿Fue Euler un matemático puro o mixto? ¿Analista, geómetra o algebrista? Seguramente que él sonreiría y mostraría su perplejidad ante semejantes preguntas. Y, sin embargo, aún hay a quien le gusta polemizar en torno a si existe realmente una matemática aplicada o tan solo aplicaciones de las matemáticas. En muchas universidades nos encontramos con departamentos de Álgebra, de Geometría, de Análisis, de Matemática Aplicada y de Probabilidad y Estadística que parcelan la docencia, a menudo, de manera artificial. Y se han creado asociaciones de matemáticos que se llaman aplicados, para diferenciarse de otros supuestamente más puros.

En el caso particular de España, tenemos además el grave asunto de la llamada «endogamia universitaria». Habiéndose organizado programas para «recuperar» a los «cerebros nacionales» que ejercen por otras latitudes. Aunque sin más efecto, nos tememos, que propiciar una tímida movilidad interna.

En fin, parafraseando de nuevo a Jorge Guillén:

Y se nos pasa la vida
ganando velocidad
como piedra en su caída.

### Genio e ingenio

Las biografías de Euler suelen subrayar su carácter afable. Al parecer, tan sólo en una ocasión participó en una polémica un tanto agria. Fue en defensa de la prioridad de Maupertuis, entonces presidente de la academia de Berlín, sobre la paternidad del principio de la mínima acción. En ella se tropezó con Voltaire, quien destiló varios comentarios ingeniosos, irónicos y punzantes sobre su escasa habilidad en cuestiones filosóficas. Pero no parece que a Euler le afectasen demasiado (aunque sí le dolieron algo más los desdenes del emperador Federico II), e incluso confió a sus allegados que, efectivamente, tendría que haber estado mejor preparado en las sutilezas del lenguaje filosófico, y en la maestría de las respuestas rápidas y brillantes, antes de haber polemizado con Voltaire. Seguramente se debió a su proverbial buen carácter que no sólo pasara por el episodio sin irritarse sino que, incluso, le hiciesen cierta gracia los aguijonazos que le prodigó el escritor y filósofo. No obstante, también es cierto que un hombre de obra tan fecunda, que abarcó a todas las matemáticas y parte de la física de su tiempo, y que descubrió las ecuaciones que rigen los movimientos de la atmósfera y los océanos, es decir, matematizó los dominios de Eolo y de Neptuno, no iba a enfadarse, o siquiera sentirse molesto, por ser objeto de las burlas del ingenioso Voltaire. En un artículo publicado hace unos pocos meses en el diario *El País*, el afamado novelista Mario Vargas Llosa, como ya lo hiciera antes Graham Greene, se preguntaba, creo que con cierta ligereza, por las escasas aportaciones suizas, reloj de cuco aparte, a la gran cultura universal. ¿Qué contestaría Euler o los también suizos Jakob, Johann y Daniel Bernoulli? Da la impresión de que ya sea por activa o por pasiva, no ha tenido nuestro gran matemático ilustrado una buena estrella literaria.

Pero volvamos a *Introductio in analysim infinitorum*. Han pasado más de doscientos cincuenta años y todavía se lee con gusto y con facilidad. Podríamos seguir usándolo como libro de texto, y quizá debiéramos hacerlo. En cualquier caso, sigue estando plenamente justificada la conocida cita de Laplace:

¡Leed a Euler, leed a Euler!
Él es el maestro de todos nosotros. □

*RESUMEN*

*El matemático Antonio Córdoba sabe bien lo difícil que es hallar un lenguaje con el que presentar nítidamente al profano el misterio de las matemáticas. No es fácil, se lamenta, hallar las metáforas precisas con las que abrir el candado que encierra a esta ciencia. Y, sin embargo, intenta adentrar al no especialista en la importante obra del matemático suizo del siglo XVIII Leonhard Euler, un hombre que abarcó todas las matemáticas y parte de la física de su tiempo, que descubrió las ecuaciones que rigen los movimientos de la atmósfera y los océanos, y del que se acaba de publicar, en edición facsímil del original latino y su correspondiente traducción, una de sus obras fundamentales,* Introductio in analysim infinitorum.

**Leonhard Euler**

***Introductio in analysim infinitorum***

Real Sociedad Matemática Española/Sociedad Andaluza de Enseñantes de Matemáticas, Sevilla, 2001. Dos volúmenes: edición facsímil y traducción, 320 y 406 páginas. 14.000 pesetas. ISBN: 84-923760-2-3